数理解析研究所講究録
第1615巻 2008年 126-134

縮小写像とカナン写像の比較

城西大学・理学部 吉川美佐子 (Misako Kikkawa)
Faculty of Science, Josai University.
九州工業大学・工学研究院 鈴木智成 (Tomonari Suzuki)
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology.

1. 序

(X,d) を距離空間とする. X 上の写像 T が縮小写像であるとは, $r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x,y \in X$ に対して

$$d(Tx,Ty) \leq r\, d(x,y)$$

が成り立つことを言う. 次の縮小写像の不動点定理は, 非線形解析学において非常に有名であり, 様々な応用のある定理である.

定理 1 (Banach [1]). (X,d) を完備距離空間とする. このとき, X 上の縮小写像 T はただ一つの不動点を持つ.

一方で, 1969年に Kannan は次の不動点存在定理を証明した.

定理 2 (Kannan [4]). (X,d) を完備距離空間とする. X 上の写像 T がカナン写像, すなわち $\alpha \in [0,1/2)$ が存在して, 任意の $x,y \in X$ に対して

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha\,(d(x,Tx)+d(y,Ty))$$

であるとする. このとき, T はただ一つの不動点を持つ.

縮小写像とカナン写像は独立の概念である. 例えば, $X=[0,1]$, $T(x)=x/3$ とすると, T は縮小写像であるが,

$$d(T(0),T(1/3)) = (1/2)\,d(0,T(0)) + (1/2)\,d(1/3,T(1/3))$$

となるので T はカナン写像ではない. また, $x \in [0,1/2]$ のとき $T(x)=x/4$, $x \in (1/2,1]$ のとき $T(x)=x/5$ とすると, T は連続でないから縮小写像ではないが, カナン写像になっている. よって, 縮小写像の条件とカナン写像の条件を直接比べることはできない. 定理1と定理2は, 完備距離空間において縮小写像とカナン写像が不動点を持つことを示した似たような定理であるが, 一つ面白い違いがある. それは, 定理2は完備性を特徴付けるが, 定理1は特徴付けないということである. X の任意のカナン写像が不動点を持つことは, X が完備であることと同値になるが, 任意の縮小写像が不動点を持っても, 完備でない距離空間が存在する. 詳しくは [2, 8] を参照のこと. よって, 完備性の特徴付けという点から見ると, 縮小写像の条件はカナン写像の条件より強い条件と言うことができる. このように, 視点を変えて見てみると, 縮小写像とカナン写像を間接的に比較することができる. そして, 両写像の特徴が見えてくる所が大変興味深い. 本稿では, 別な視点から縮小写像とカナン写像の比較を行いたいと思う.

最近, 定理1の拡張であり完備性を特徴付ける定理が証明された.

MSC (2000). 54H25
キーワード. 縮小写像, 不動点, バナッハの不動点定理, カナン写像, タウ距離

定理 3 ([13]). 関数 $\theta : [0,1) \to (1/2, 1]$ を

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & (0 \le r \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ \frac{1-r}{r^2} & (\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \frac{1}{1+r} & (\frac{1}{\sqrt{2}} \le r < 1) \end{cases}$$

と定義する. (X,d) を完備距離空間, T を X 上の写像とする. $r \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\theta(r)\, d(x, Tx) \le d(x,y) \to d(Tx, Ty) \le r\, d(x,y)$$

が成り立つと仮定する. このとき, T はただ一つの不動点を持つ.

注意. $\theta(r)$ の値はなるべく大きい方が定理の仮定は弱くなるので, $\theta(r)$ が大きいほどよい定理になる. 上記の $\theta(r)$ はすべての $r \in [0,1)$ に対して, ベスト定数になっていることが分かっている. つまり, 定理 3 をこれ以上改良することはできない. 詳しくは [13] を参照のこと.

研究が進むにつれて研究目的が広がり, 本稿の表題が『縮小写像とカナン写像の比較』となったが, 最初から二つの写像の比較を目指していたのではなかった. 筆者にとって, 関数 θ は直感に反する不自然なものであったので, カナン写像の研究を通して, 関数 θ を感覚的に理解したいというのが最初の目的だった. そして後述する定理 7 を証明した時, この目的はある程度達成されたと思っている. [14] における定理 3 の証明も参照して頂きたい.

本稿の第 2 章では, 定理 3 のカナン版を証明して, この観点から縮小写像との比較を試みる. 第 3 章では, 第 2 章での結果を踏まえ, カナン写像よりも弱い条件である M-カナン写像と縮小写像との比較をする. 第 4 章では, 一般的な距離の概念を弱めたタウ距離を用いたときの縮小写像とカナン写像の関係について述べる.

2. 一般化されたカナン写像

この章では, 定理 3 のカナン版を証明する. 次の補助定理を示すことから始める.

補助定理 4 ([6]). (X,d) を距離空間, T を X 上の写像とする. $x \in X$ と $r \in [0,1)$ が $d(Tx, T^2x) \le r\, d(x, Tx)$ を満たしていると仮定する. このとき, $y \in X$ に対して

$$\frac{1}{1+r} d(x, Tx) \le d(x,y) \quad \text{または} \quad \frac{1}{1+r} d(Tx, T^2x) \le d(Tx, y)$$

が成り立つ.

証明. 背理法で証明する.

$$\frac{1}{1+r} d(x, Tx) > d(x,y) \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{1+r} d(Tx, T^2x) > d(Tx, y)$$

が成り立つと仮定すると

$$d(x,Tx) \le d(x,y) + d(y,Tx) < \frac{1}{1+r}\big(d(x,Tx) + d(Tx,T^2x)\big)$$
$$\le \frac{1}{1+r}\big(d(x,Tx) + r\,d(x,Tx)\big) = d(x,Tx)$$

を得る．これは矛盾である． □

定理 5 ([6])**.** 関数 $\varphi : [0,1) \to (1/2,1]$ を

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & (0 \le r < \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \frac{1}{1+r} & (\frac{1}{\sqrt{2}} \le r < 1) \end{cases}$$

と定義する．(X,d) を完備距離空間，T を X 上の写像とする．$\alpha \in [0,1/2)$ とし，$r := \alpha/(1-\alpha) \in [0,1)$ とおく．任意の $x,y \in X$ において

$$\varphi(r)\,d(x,Tx) \le d(x,y) \to d(Tx,Ty) \le \alpha\,d(x,Tx) + \alpha\,d(y,Ty)$$

が成り立つと仮定する．このとき，T の不動点がただ一つ存在する．

証明. $\varphi(r) \le 1$ なので，任意の $x \in X$ に対して $\varphi(r)\,d(x,Tx) \le d(x,Tx)$ が成り立つ．よって仮定から $d(Tx,T^2x) \le \alpha\,d(x,Tx) + \alpha\,d(Tx,T^2x)$ が言える．すなわち，

$$d(Tx,T^2x) \le r\,d(x,Tx) \tag{1}$$

が任意の $x \in X$ で成り立つ．$u \in X$ とし，$u_0 = u$, $u_n = T^n u$ とおく．(1) から，

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n,u_{n+1}) \le \sum_{n=1}^{\infty} r^n\,d(u_0,u_1) < \infty$$

を得るので，$\{u_n\}$ は X でコーシー列になり，X の完備性から収束先 z が存在する．

次に，$x \ne z$ である $x \in X$ に対して，

$$d(z,Tx) \le \alpha\,d(x,Tx) \tag{2}$$

が成り立つことを示す．$u_n \to z$ より，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \ge n_0$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して $d(u_n,z) \le (1/3)\,d(x,z)$ となる．よって，

$$\begin{aligned}\varphi(r)\,d(u_n,Tu_n) &\le d(u_n,Tu_n) = d(u_n,u_{n+1}) \le d(u_n,z) + d(u_{n+1},z) \\ &\le \frac{2}{3}d(x,z) = d(x,z) - \frac{1}{3}d(x,z) \le d(x,z) - d(u_n,z) \\ &\le d(u_n,x).\end{aligned}$$

したがって，$n \ge n_0$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$d(Tu_n,Tx) \le \alpha\,d(u_n,Tu_n) + \alpha\,d(x,Tx)$$

が成り立つ．よって，$x \ne z$ である $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}d(z,Tx) &= \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},Tx) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n,Tx) \\ &\le \lim_{n\to\infty}\big(\alpha\,d(u_n,Tu_n) + \alpha\,d(x,Tx)\big) = \alpha\,d(x,Tx)\end{aligned}$$

を得る.

次に, $0 \leq r < 1/\sqrt{2}$ のとき, z が T の不動点であることを示す. $Tz \neq z$ とすると, (1), (2) から

$$d(z, T^2 z) \leq \alpha\, d(Tz, T^2 z) \leq \alpha\, r\, d(z, Tz)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, T^2 z) + d(Tz, T^2 z) \leq \alpha\, r\, d(z, Tz) + r\, d(z, Tz) \\ &= \frac{r + 2r^2}{1+r} d(z, Tz) < \frac{r+1}{1+r} d(z, Tz) = d(z, Tz) \end{aligned}$$

を得る. これは矛盾であるから, $Tz = z$ を得る.

$1/\sqrt{2} \leq r < 1$ の時は, 補助定理 4 から $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\varphi(r)\, d(u_{2n}, u_{2n+1}) \leq d(u_{2n}, z) \quad \text{または} \quad \varphi(r)\, d(u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1}, z)$$

が成り立つ. よって, $\{n\}$ の部分列 $\{n_j\}$ が存在して, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$\varphi(r)\, d(u_{n_j}, u_{n_j+1}) \leq d(u_{n_j}, z)$$

を満たす. よって仮定から,

$$d(z, Tz) = \lim_{j\to\infty} d(u_{n_j+1}, Tz) \leq \lim_{j\to\infty} \big(\alpha\, d(u_{n_j}, u_{n_j+1}) + \alpha\, d(z, Tz)\big) = \alpha\, d(z, Tz)$$

が成り立つ. $\alpha < 1/2$ であることにより $Tz = z$ を得る. 以上により両方のケースで $Tz = z$ が証明できた. z が一意であることは (2) から得られる. □

次の定理から, $\varphi(r)$ がすべての $r \in [0, 1)$ においてベスト定数になっていることがわかる.

定理 6 ([6]). 関数 φ を定理 5 のように定義する. 任意の $\alpha \in [0, 1/2)$ に対して, 完備距離空間 (X, d) と不動点を持たない X 上の写像 T で, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\varphi(r)\, d(x, Tx) < d(x, y) \to d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, Tx) + \alpha\, d(y, Ty)$$

を満たすものが存在する. ただし, $r = \alpha/(1-\alpha)$ である.

証明. $0 \leq r < 1/\sqrt{2}$ のとき, 実数空間 $\mathbb{R}$ の完備な部分集合 X を $X = \{-1, 1\}$ とする. さらに X 上の写像 T を任意の $x \in X$ に対し $Tx = -x$ で定義する. このとき, T は不動点を持たない. さらに, 任意の $x, y \in X$ に対して, $\varphi(r)\, d(x, Tx) = 2 \geq d(x, y)$ となる.

$1/\sqrt{2} \leq r < 1$ のときは, $\mathbb{R}$ の完備な部分集合 X を

$$X = \{0, 1\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

とする. ただし, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で $x_n = (1-r)(-r)^n$ とする. X 上の写像 T を任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $T0 = 1$, $T1 = 1 - r$, $Tx_n = x_{n+1}$ と定義すると以下は明らかである.

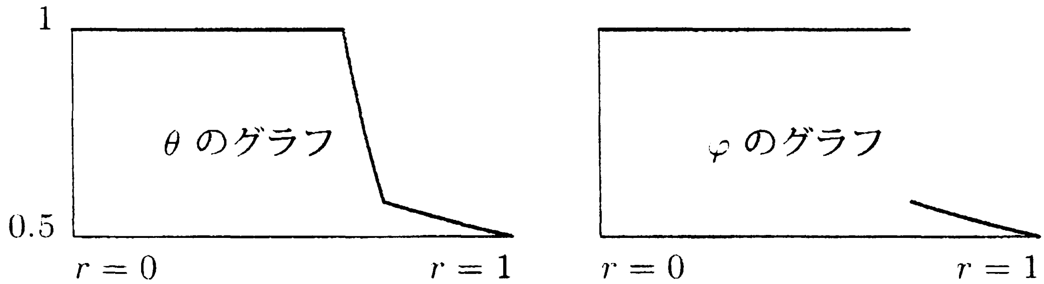
- $d(T0, T1) = r = \alpha\, d(0, T0) + \alpha\, d(1, T1)$
- 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $\varphi(r)\, d(0, T0) \geq \varphi(r)\, d(x_n, Tx_n) = d(0, x_n)$

また．$m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して．$d(Tx_m, Tx_n) \leq d(0, Tx_m) + d(0, Tx_n) = \alpha\, d(x_m, Tx_m) + \alpha\, d(x_n, Tx_n)$ と

$$\begin{aligned} & d(T1, Tx_n) - \big(\alpha\, d(1, T1) + \alpha\, d(x_n, Tx_n)\big) \\ & \leq d(0, T1) + d(0, Tx_n) - \big(\alpha\, d(1, T1) + \alpha\, d(x_n, Tx_n)\big) \\ & = d(0, T1) - \alpha\, d(1, T1) = \frac{1 - 2r^2}{1 + r} \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ． □

注意. $\theta(r)$ と $\varphi(r)$ は似ているが，ある r では $\theta(r) \neq \varphi(r)$ となっている．任意の $r \in (0, 1]$ において，$\theta(r) \leq \varphi(r)$ であるから，定理 3 と定理 5 を比べると，カナン写像のほうがある意味で強い条件と言える．証明し始めた当初は，カナン写像の場合も $\theta(r)$ がベスト定数になると予想していたが，予想に反する結果となった．



3. M-カナン写像

第 2 章の結果から，$\theta(r)$ がベスト定数になるような写像の条件は他にあるだろうか，という疑問が自然に湧いてくる．この章では，その問いに関する一つの回答を与える．

定理 7 ([6]). 関数 $\theta : [0, 1) \to (1/2, 1]$ を定理 3 のように定義する．(X, d) を距離空間，T を X 上の写像とする．$r \in [0, 1)$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\theta(r)\, d(x, Tx) \leq d(x, y) \to d(Tx, Ty) \leq r \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

が成り立つと仮定する．このとき，T の不動点がただ一つ存在する．

証明. $\theta(r)\, d(x, Tx) \leq d(x, Tx)$ なので仮定より

$$d(Tx, T^2x) \leq r \max\left\{d(x, Tx), d(Tx, T^2x)\right\}$$

が成り立つ．よって，$x \in X$ に対して

$$d(Tx, T^2x) \leq r\, d(x, Tx) \tag{3}$$

である．$u \in X$ とし $u_0 = u$，$u_n = T^n u$ とする．定理 5 の証明のようにして，$\{u_n\}$ がある点 $z \in X$ に収束することが証明出来る．

次に，$x \neq z$ である $x \in X$ に対して，

$$d(z, Tx) \leq r\, d(x, Tx) \tag{4}$$

が成り立つことを示す．$u_n \to z$ であるから十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対しては，$\theta(r)\, d(u_n, Tu_n) \le d(u_n, x)$ となる．よって仮定から

$$\begin{aligned} d(z, Tx) &= \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tx) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, Tx) \\ &\le \lim_{n\to\infty} r \max\left\{d(u_n, Tu_n), d(x, Tx)\right\} = r\, d(x, Tx) \end{aligned}$$

が成り立つ．

次に z が T の不動点であることを示す．$0 \le r < 1/\sqrt{2}$ のとき，$\theta(r) \le (1-r)/r^2$ である．帰納法により，$n \ge 2$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$d(T^n z, Tz) \le r\, d(z, Tz) \tag{5}$$

となることを示す．$n = 2$ の時は，(5) は (3) であるから (5) は成り立つ．$n \ge 2$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して，$d(T^n z, Tz) \le r\, d(z, Tz)$ と仮定しよう．

$$d(z, Tz) \le d(z, T^n z) + d(T^n z, Tz) \le d(z, T^n z) + r\, d(z, Tz)$$

より $(1-r)\, d(z, Tz) \le d(z, T^n z)$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \theta(r)\, d(T^n z, T^{n+1} z) &\le \frac{1-r}{r^2} d(T^n z, T^{n+1} z) \le \frac{1-r}{r^n} d(T^n z, T^{n+1} z) \\ &\le (1-r)\, d(z, Tz) \le d(z, T^n z). \end{aligned}$$

したがって仮定より

$$d(T^{n+1} z, Tz) \le r \max\left\{d(T^n z, T^{n+1} z), d(z, Tz)\right\} = r\, d(z, Tz)$$

が成り立つ．よって，$n \ge 2$ である $n \in \mathbb{N}$ に対して (5) が成り立つことが示せた．今，$Tz \ne z$ と仮定すると，(5) からすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T^n z \ne z$ が成り立つ．よって (4) より，

$$d(T^{n+1} z, z) \le r\, d(T^n z, T^{n+1} z) \le r^{n+1}\, d(z, Tz).$$

従って $T^n z \to z$ を得る．これは，(5) に矛盾する．よって $Tz = z$ を得る．

$1/\sqrt{2} \le r < 1$ のとき，定理 5 の証明のようにして，$\{n\}$ の部分列 $\{n_j\}$ が存在して，任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して，$\theta(r)\, d(u_{n_j}, u_{n_j+1}) \le d(u_{n_j}, z)$ が成り立つことが言える．よって仮定より，

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &= \lim_{j\to\infty} d(u_{n_j+1}, Tz) \\ &\le \lim_{j\to\infty} r \max\left\{d(u_{n_j}, u_{n_j+1}), d(z, Tz)\right\} = r\, d(z, Tz). \end{aligned}$$

$r < 1$ であることから $Tz = z$ を得る．よっていずれの場合でも $Tz = z$ であることが示された．z が一意であることは (4) から示される．　□

次の定理から，すべての $r \in [0, 1)$ に対して，$\theta(r)$ はベスト定数であることがわかる．

定理 8 ([6])．関数 θ を定理 3 のように定義する．任意の $r \in [0, 1)$ に対して，完備距離空間 (X, d) と不動点を持たない X 上の写像 T で，任意の $x, y \in X$ において

$$\theta(r)\, d(x, Tx) < d(x, y) \to d(Tx, Ty) \le r \max\left\{d(x, Tx), d(y, Ty)\right\}$$

を満たすものが存在する．

証明. $0 \le r \le (1/2)(\sqrt{5}-1)$ または $1/\sqrt{2} \le r < 1$ のときは. $\varphi(r) = \theta(r)$ なので. 既に示している. よって. $(1/2)(\sqrt{5}-1) < r < 1/\sqrt{2}$ の場合だけ示せばよい. $\mathbb{R}$ の完備な部分集合 X を $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. ただし. $x_0 = 0$. $x_1 = 1$. $x_2 = 1-r$ であり $n \ge 3$ に対しては $x_n = (1-r-r^2)(-r)^{n-3}$ とする. X 上の写像 T を任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $Tx_n = x_{n+1}$ と定義すると. 以下のことは明らかである.

- $d(Tx_0, Tx_1) = r = r\, d(x_0, Tx_0) = r \max\big\{d(x_0, Tx_0), d(x_1, Tx_1)\big\}$
- $\theta(r)\, d(x_0, Tx_0) \ge \theta(r)\, d\big(x_2, Tx_2\big) = 1 - r = d(x_0, x_2)$
- $n \ge 3$ に対して. $\theta(r)\, d(x_0, Tx_0) \ge \theta(r)\, d(x_n, Tx_n) = \frac{1-r^2}{r^2} d(x_0, x_n) \ge d(x_0, x_n)$
- $d\big(Tx_1, Tx_2\big) = r^2 = r\, d(x_1, Tx_1)$

$x_3 < x_5 < x_7 < \cdots < x_0 < \cdots < x_8 < x_6 < x_4 < x_2 < x_1$ であるから.

- $n \ge 3$ に対して. $d\big(Tx_1, Tx_n\big) < d(x_2, x_3) = r^2 = r\, d(x_1, Tx_1)$
- $n \ge 3$ に対して. $d(Tx_2, Tx_n) - r\, d(x_2, Tx_2) \le d(x_3, x_4) - r^3 = 2r^2 - 1 \le 0$
- $3 \le m < n$ に対して. $d(Tx_m, Tx_n) \le d(Tx_m, Tx_{m+1}) = r\, d(x_m, Tx_m)$

が成り立つ. □

ある $r \in [0, 1)$ が存在して. 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \le r \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

となるとき. T をM-カナン写像と呼ぶことにする. 明らかに. カナン写像ならばM-カナン写像である. 次の章では. 一般的な距離の概念を弱めたタウ距離を用いて. タウ距離で定義したM-カナン写像と縮小写像の条件の関係を考察する.

4. タウ距離で定義したカナン写像と縮小写像

[9] でSuzukiはタウ距離の概念を導入した. (X, d) を距離空間とする. $X \times X$ から $[0, \infty)$ への写像 p が X 上のタウ距離であるとは. $X \times [0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への写像 η が存在して以下を満たすことである.

(τ1) 任意の $x, y, z \in X$ に対して. $p(x, z) \le p(x, y) + p(y, z)$

(τ2) $\eta(x, 0) = 0$ かつ $\eta(x, t) \ge t$ $\quad(\forall x \in X, t \in [0, \infty))$. η は第2変数に関して凹. 連続

(τ3) 任意の $w \in X$ に対して. $\lim_n x_n = x$ かつ $\lim_n \sup\{\eta(z_n, p(z_n, x_m)) : m \ge n\} = 0$ ならば $p(w, x) \le \liminf_n p(w, x_n)$

(τ4) $\lim_n \sup\{p(x_n, y_m) : m \ge n\} = 0$ かつ $\lim_n \eta(x_n, t_n) = 0$ ならば $\lim_n \eta(y_n, t_n) = 0$

(τ5) $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, x_n)) = 0$ かつ $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, y_n)) = 0$ ならば $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$

普通の意味での距離 d は タウ距離になっている. [3, 9–12, 15] を参照のこと. 本稿では距離空間 (X, d) 上のタウ距離の全体を $\tau(X)$ で表すことにする. $p \in \tau(X)$ と $r \in [0, 1)$ が存在して. 任意の $x, y \in X$ に対して

$$p(Tx, Ty) \le r\, p(x, y)$$

であるような X 上の写像 T の全体を $TC(X)$ と書く. $TK(X)$ は $p \in \tau(X)$ と $\alpha \in [0, 1/2)$ が存在して, 次のどちらかを満たす X 上の写像 T の全体を表す: 任意の $x, y \in X$ に対して

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha \bigl(p(Tx, x) + p(Ty, y)\bigr)$$

または, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha \bigl(p(Tx, x) + p(y, Ty)\bigr).$$

$TM(X)$ は $p \in \tau(X)$ と $r \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$p(Tx, Ty) \leq r \max \bigl\{p(Tx, x), p(Ty, y)\bigr\}$$

または, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$p(Tx, Ty) \leq r \max \bigl\{p(Tx, x), p(y, Ty)\bigr\}$$

となる X 上の写像 T の全体を表す. $T \in TC(X)$ であるような T を, あるタウ距離 p による縮小写像, $T \in TK(X)$ であるような T を, あるタウ距離 p によるカナン写像, $T \in TM(X)$ であるような T を, あるタウ距離 p による M-カナン写像とそれぞれ呼ぶことにする. この3つの集合は完全に一致することが次の定理から分かる.

定理 9 ([7, 11]). (X, d) を距離空間とすると

$$TC(X) = TK(X) = TM(X)$$

が成り立つ.

これまで述べてきたことを表にすると, 以下のようになる.

	完備性を特徴	定数の値	タウ距離版
縮小	付けない (強)	θ (弱)	完全に同値
カナン	付ける (弱)	η (強)	完全に同値
M-カナン	付ける (弱)	θ (弱)	完全に同値

すなわち, 縮小とカナンは, 一方が強くなったり, 弱くなったり, あるいは同値になるときもある. M-カナンは縮小とカナンの弱い方と一致している.

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[2] E. H. Connell, *Properties of fixed point spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **10** (1959), 974–979.

[3] O. Kada, T. Suzuki and W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon., **44** (1996), 381–391.

[4] R. Kannan, *Some results on fixed points – II*, Amer. Math. Monthly, **76** (1969), 405–408.

[5] M. Kikkawa and T. Suzuki, *Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces*, Nonlinear Anal., **69** (2008), 2942–2949.

[6] ———, *Some similarity between contractions and Kannan mappings*, Fixed Point Theory Appl., **2008** (2008), Article ID 649749, 1–8.

[7] ______. *Some similarity between contractions and Kannan mappings II*, Bull. Kyushu Inst. Technol., **55** (2008), 1–13.

[8] P. V. Subrahmanyam, *Completeness and fixed-points*, Monatsh. Math., **80** (1975), 325–330.

[9] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458.

[10] ______, *Several fixed point theorems concerning τ -distance*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 195–209.

[11] ______, *Contractive mappings are Kannan mappings, and Kannan mappings are contractive mappings in some sense*, Comment. Math. Prace Mat., **45** (2005), 45–58.

[12] ______, *On the relation between the weak Palais-Smale condition and coercivity given by Zhong*, Nonlinear Anal., **68** (2008), 2471–2478.

[13] ______, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1861–1869.

[14] T. Suzuki and M. Kikkawa, *Some remarks on a recent generalization of the Banach contraction principle*, to appear in Proc. IC-FPTA 2007.

[15] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.